

Parameter einer Kurvenschar bestimmen

Ziel: Gegeben ist eine Kurvenschar und es soll a so bestimmt werden, dass die Kurven der Schar bestimmte Eigenschaften aufweisen, z.B.:

- Eine , keine oder unendlich viele Nullstellen besitzt.
- Durch einen bestimmten Punkt gehen.
- Eine bestimmte Steigung besitzt

Beispiel: Gegeben ist die Kurvenschar $f_a(x) = 2x + a$. Für welchen Parameter a geht die Kurvenschar durch den Punkt $P(1|3)$?

Rechenweg: P in $f_a(x)$ einsetzen und a berechnen:

$$3 = 2 \cdot 1 + a$$

$$3 = 2 + a$$

$$a = 1$$

Für $a = 1$ geht der Graph der Schar durch den Punkt $P(1|3)$. Überprüfe dies, indem du die Funktion zeichnest

Beispiel 2: Welche Kurve der Schar $f_a(x) = x^2 - 2ax + 1$ hat an der Stelle $x = 4$ die Steigung 1?

$$f_a(x) = x^2 - 2ax + 1$$

$$f'_a(x) = 2x - 2a$$

$$f'_a(4) = 1$$

$$2 \cdot 4 - 2 \cdot a = 1$$

$$8 - 2a = 1 \quad | -8$$

$$-2a = -7 \quad | :(-2)$$

$$a = 3,5$$

Für $f_{3,5}(x)$ hat die Kurve die Steigung 1 an der Stelle $x = 4$

Aufgabe 1: Bestimme a so, dass jede Kurve der Schar $f(x) = ax^2 + 3a^2$ mit $a \neq 0$ genau zwei Nullstellen besitzt.

Aufgabe2: Welche Kurve der Schar $f_a(x) = x^3 - 3ax^2$ hat an der Stelle $x = 1$ die Steigung -9?

Aufgabe 3: Welche Kurve der Schar besitzt eine Wendetangente, die durch den Punkt $P(0|8)$ geht?

Lösungen:

Aufgabe 1:

$$f(x) = ax^2 + 3a^2 \text{ mit } a \neq 0$$

$$ax^2 + a^2 = 0 \mid -3a^2$$

$$ax^2 = -3a^2 \mid : a$$

$$x^2 = -3a \mid \sqrt{}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-3a}$$

Zwei Nullstellen, wenn der Wert unter der Wurzel positiv ist:

$$-3a > 0 \mid :(-3)$$

$$a < 0$$

Für $a < 0$ hat jede Kurve der Schar genau zwei Nullstellen.

Aufgabe 2

Welche Kurve der Schar $f_a(x) = x^3 - 3ax^2$ hat an der Stelle $x = 1$ die Steigung -9?

$$f'_a(x) = 3x^2 - 6ax$$

$$-9 = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot a \cdot 1$$

$$-9 = 3 - 6a$$

$$6a = 12$$

$$a = 2$$

$f_2(x)$ hat an der Stelle $x=1$ die Steigung -9

Aufgabe 3:

Welche Kurve der Schar besitzt eine Wendetangente, die durch den Punkt $P(0|8)$ geht?

$$f_a(x) = x^3 - 3ax^2$$

$$f'_a(x) = 3x^2 - 6ax$$

$$f''_a(x) = 6x - 6a$$

$$f'''_a(x) = 6$$

$$6x - 6a = 0$$

$$x = a$$

$$f'''_a(a) \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt}$$

$$f_a(a) = a^3 - 3a \cdot a^2 = -2a^3$$

$$\text{WP}(a | -2a^3)$$

Tangente bestimmen:

$$y = mx + b \quad m: \quad f'_a(x) = 3x^2 - 6ax$$

$$f'_a(a) = 3a^2 - 6a \cdot a = 3a^2 - 6a^2 = -3a^2$$

$$b: \quad -2a^3 = -3a^2 \cdot a + b$$

$$-2a^3 = -3a^3 + b$$

$$a^3 = b$$

Tangente im Wendepunkt: $y = 3a^2 \cdot x + a^3$

Nun Punkt $P(0|8)$ einsetzen.

$$8 = -3a \cdot 0^2 + a^3$$

$$8 = a^3$$

$$2 = a$$

Für $a = 2$ geht die Wendetangente durch den Punkt $P(0|8)$